Jacques Haïssinski
5 avril 2017

## À propos des tests des calculs d'IBS faits par Marica et Christelle

Les courbes montrées par Marica dans la réunion 'Dynamique faisceau' du 28 février posent la question suivante : quelle est l'origine de la réduction par $\sim 20$ de l'effet de l'IBS sur le rapport $\delta E|_{en\ présence\ d'IBS}/\delta E|_{en\ absence\ d'IBS}$, calculé par Marica et Christelle, lorsque la dispersion initiale de l'énergie, $(\delta E/E)^0$, est multipliée par deux? (Comparer les graphes du haut des diapositives 4 et 5 ou voir la diapositive 8.)

Comme les équations différentielles de Mtingwa et Bjorken contiennent leurs paramètres $\sigma_p$, $\epsilon_h$ et $\epsilon_v$ dans les membres de gauche *et* dans les membres de droite, il n'est pas facile de les utiliser pour interpréter ce qui se passe lorsqu'on change un (seul) paramètre. Je pars donc de l'analyse directe de l'IBS décrite dans une présentation que j'ai faite en 2010 et que je reprends brièvement ici.

### Le B.A.-BA de l'IBS

**Notations :** $E_0$ = énergie moyenne des électrons stockés.
$\sigma_E^0$ = écart-type de la dispersion en énergie des $e^-$ stockés à la date $t = 0$.
$\delta E_{i,j}$ = saut de l'énergie de l'électron numéro $i$ dû à sa $j^{ème}$ collision intra-paquet.

Soit un paquet de N électrons, chacun ayant une énergie $E_i$ ($i = 1, 2, \ldots N$) à la date $t = 0$. On a : $< E_i - E_0 >_i = 0$ et $< (E_i - E_0)^2 >_i = (\sigma_E^0)^2$, où la valeur moyenne sur $f(X_i)$ est notée $< f(X_i) >_i$.

À partir de $t = 0$, chaque électron subit des collisions coulombiennes élastiques, notées avec l'indice $j$, avec d'autres $e^-$ du paquet, du fait, essentiellement, de son mouvement betatron *transverse* (le mouvement synchrotron est beaucoup plus lent). Le transfert d'une *(très) petite fraction* de la quantité de mouvement initiale, purement transverse, en une quantité de mouvement longitudinale s'accompagne d'un saut en énergie, $\delta E_{i,j}$, lors du $j^{ème}$ choc. Le signe de $\delta E_{i,j}$ est aléatoire. On a donc $< \delta E_{i,j} >_j = 0$ et on pose $\Delta_i^2 = < \delta E_{i,j}^2 >_j$.

Au bout de $t$ secondes, l'énergie de l'électron $i$ est passée de $E_i$ à $E_i + \sum_{j=1}^{j=nt} \delta E_{i,j}$, où $n$ est le nombre moyen de collisions par seconde que subit un $e^-$ stocké. À la fin de cet intervalle de t secondes, la dispersion en énergie du paquet de $e^-$ est donc devenue:

$$(\sigma_E^0)^2 \to \sigma_E(t)^2 = < [(E_i + \sum_{j=1}^{j=nt} \delta E_{i,j}) - E_0]^2 >_i$$

. En développant le crochet et en tenant compte des relations données plus haut, il vient, après avoir posé $\Delta^2 =< \Delta_i^2 >_i$,

$$\sigma_E(t)^2 = (\sigma_E^0)^2 + n\ \Delta^2\ t,$$

ou encore $\sigma_E(t)^2 = (\sigma_E^0)^2 + A\ (N/V)\ \Delta^2\ t$ où j'ai remplacé $n$ par $A\ (N/V)$. J'ai pris en compte le fait que, toutes choses restant égales par ailleurs, le nombre de chocs par seconde subi par un électron est proportionnel à la densité en nombre, $N/V$ ($V$ est le volume du paquet d'électrons). Le facteur $A$ dépend de divers paramètres (voir ma présentation détaillée de 2010). C'est une constante dans la mesure où ces paramètres sont eux-mêmes constants.
Ces dernières expressions montrent que, fondamentalement, l'IBS génère des fluctations en énergie qui se *combinent quadratiquement* à celles qui étaient présentes initialement – ce qui ne ressort pas aussi clairement du formalisme de Mtingwa et Bjorken.

On a donc

$$\sigma_E(t)/\sigma_E^0 = [1 + (A\,(N/V)\,\Delta^2/(\sigma_E^0)^2)\ t]^{1/2}.$$

Si le temps $t$ est assez court pour que le second terme du crochet soit petit devant l'unité, cette équation peut être mise sous la forme

$$\sigma_E(t)/\sigma_E^0 \approx 1 + [\frac{1}{2} A\,(N/V)\,\Delta^2/(\sigma_E^0)^2]\ t$$

qui est appropriée pour interpréter les résultats de Marica et Christelle puisque, en ordonnées des graphes du haut des diapositives 4 et 5, c'est justement le membre de gauche de cette dernière équation qui est porté en fonction du temps.

## Le changement de pente de la courbe $\sigma_E(t)/\sigma_E^0$

Le tout premier graphe présenté par Marica montre que la pente *moyenne* pendant l'intervalle de temps final $[15-20]$ ms de la courbe $\sigma_E(t)/\sigma_E^0$ est $\simeq$ deux fois plus faible que la pente *moyenne* de la courbe pendant l'intervalle initial $[0, 5]$ ms. L'explication de cette évolution de la dérivée est très probablement due au fait que l'émittance *horizontale* croît durant les 20 ms de stokage comme le montre le deuxième graphe de la présentation de Marica : rapportée à l'émittance initiale, l'émittance passe de 1.5 en *moyenne* sur l'intervalle $[1, 5]$ ms à 3 *en moyenne* sur l'intervalle $[15, 20]$ ms, soit une augmentation d'un facteur 2. Cette augmentation entraîne une augmentation d'un facteur $\sqrt{2}$ des dimensions horizontales du faisceau et donc du volume du paquet, et une augmentation par le même facteur des vitesses transverses horizontales des électrons.

Or la diapositive 9 de ma présentation de 2010 montre que la différence des vitesses transverses $v_1 - v_2$ figure à la puissance $-1$ dans le facteur $A$ introduit plus haut (cette puissance $-1$ tient au fait que la section efficace de diffusion coulombienne varie comme $1/v^4$). Il s'ensuit que le facteur $A$ est diminué par un facteur proche de $\sqrt{2}$ ('proche' parce que les vitesses qui figurent dans l'équation de ma diapositive 9 résulte de la combinaison des vitesses horizontales et verticales. On constate que la diminution de la pente est à peu près en accord avec ce que l'on attend de l'augmentation importante de l'émittance horizontale.

### L'effet de la multiplication de $(\delta E/E)^0$ par un facteur 2

Que se passe-t-il lorsqu'on double le paramètre $(\delta E/E)^0$ et seulement celui-là? Les graphes qui figurent en haut des diapositives 4 et 5 de Marica montrent que la pente du rapport $\delta E|_{en\ présence\ d'IBS}/\delta E|_{en\ absence\ d'IBS}$, moyennée sur les 5 premières ms est diminuée d'un 'bon' facteur 20 lorsque $(\delta E/E)^0$ est multiplié par 2.

Étant donné que

• la longueur du paquet est proportionnelle à $(\delta E/E)^0$, le volume du paquet est doublé,

• le terme $(\sigma_E^0)^2$ qui est au dénominateur dans le crochet $[\frac{1}{2}A\,(N/V)\,\Delta^2/(\sigma_E^0)^2]$ (voir plus haut) est multiplié par 4,

on s'attend à ce que la pente initiale de la courbe $\sigma_E(t)/\sigma_E^0$ soit réduite par un facteur 8 seulement.

Il manque donc un 'bon' facteur 2. L'origine de ce facteur additionnel est sans doute l'accroissement du volume du paquet d'électrons qui résulte du doublement de la dispersion en énergie car la fonction dispersion a une grande amplitude par endroits dans ThomX.